O pewnym równaniu wielomianowym.

Rafał Świetlicki

Zespół Szkół Ekonomicznych im. A. i J. Vetterów w Lublinie

Przeszukując zasoby Internetu pod kątem zadań z konkursów matematycznych organizowanych w różnych krajach, które to zadania mógłbym wykorzystać na lekcjach matematyki, natrafiłem na wyglądające na pierwszy rzut oka dosyć prosto równanie wielomianowe $x^4 - 2x^3 + x = 6$. Niestety, poszukiwanie pierwiastków wymiernych zakończyło się fiaskiem. Tym samym omawiane na lekcjach matematyki metody rozwiązywania równań wielomianowych odpadają. Jednak okazuje się, że równanie to ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych i można je dokładnie wyznaczyć, sprowadzając to równanie do pewnego równania kwadratowego.

Chciałbym w tym artykule zaprezentować tę metodę, ale na przykładzie równania ogólniejszego, czyli równania postaci:

$$x^4 + 2bx^3 - b^3x = c \quad (1),$$

gdzie $b, c \in R, b \neq 0$.

Przyjmując:

$$x^2 + bx - b^3 = u \quad (2)$$

dostajemy:

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(x^2 + bx - b^3\right)^2 = x^4 + b^2x^2 + b^6 + 2bx^3 - 2b^3x^2 - 2b^4x = \\ &= x^4 + 2bx^3 - b^3x + x^2\left(b^2 - 2b^3\right) + bx\left(b^2 - 2b^3\right) - b^3\left(b^2 - 2b^3\right) + b^5 - b^6 = \\ &= c + \left(b^2 - 2b^3\right)\left(x^2 + bx - b^3\right) + b^5 - b^6 = c + \left(b^2 - 2b^3\right)u + b^5 - b^6 \end{aligned}$$

Tym samym równanie (1) można sprowadzić do równania kwadratowego:

$$u^2 + \left(2b^3 - b^2\right)u + b^6 - b^5 - c = 0 \quad (3),$$

którego wyróżnik jest równy:

$$\Delta_u = b^4 + 4c.$$

Jeżeli $\Delta_u > 0$, to równanie (3) ma dwa rozwiązania u_1, u_2 i żeby rozwiązać równanie (1), należy rozwiązać dwa równania kwadratowe:

$$x^2 + bx - b^3 = u_1 \text{ oraz } x^2 + bx - b^3 = u_2,$$

które mogą mieć albo nie mieć rozwiązań.

Jeżeli $\Delta_u = 0$, to rozwiązaniem równania (3) jest liczba $u_0 = \frac{b^2}{2} - b^3$ i żeby rozwiązać równanie (1), należy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$x^2 + bx - b^3 = \frac{b^2}{2} - b^3$$

$$x^2 + bx - \frac{b^2}{2} = 0 \qquad .$$

$$\Delta = 3b^2$$

Zatem w tym przypadku równanie (1) ma zawsze dwa rozwiązania i są nimi liczby $x_1 = \frac{-b - b\sqrt{3}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{-b + b\sqrt{3}}{2}$.

Przeanalizujmy teraz sytuację, gdy $c = 0$. Wówczas $\Delta_u = b^4$ i równanie (3) ma dwa rozwiązania: $u_1 = -b^3, u_2 = -b^3 + b^2$.

Równanie $x^2 + bx - b^3 = -b^3$ ma dwa rozwiązania: $x = 0 \quad \vee \quad x = -b$.

Równanie $x^2 + bx - b^3 = -b^3 + b^2$ ma dwa również rozwiązania: $x = \frac{-b - b\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-b + b\sqrt{5}}{2}$.

Tym samym równanie $x^4 + 2bx^3 - b^3x = 0$ ma cztery rozwiązania: $x \in \left\{0; -b; \frac{-b - b\sqrt{5}}{2}; \frac{-b + b\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Jednocześnie dostajemy rozkład $x^4 + 2bx^3 - b^3x = x(x+b)(x^2 + bx - b^2)$.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $x^4 + 4x^3 - 8x = -4$. Mamy: $b = 2, c = -4$. Można go zatem sprowadzić do równania kwadratowego $u^2 + 12u + 36 = 0$, w przypadku którego $\Delta_u = 0$. Tym samym równanie $x^4 + 4x^3 - 8x = -4$ ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

Przykład 2.

Rozwiążemy na koniec równanie stanowiące punkt wyjścia do tego artykułu $x^4 - 2x^3 + x = 6$. Mamy: $b = -1, c = 6$. Można go zatem sprowadzić do równania kwadratowego $u^2 - 3u - 4 = 0$, które ma dwa rozwiązania $u_1 = -1, u_2 = 4$.

Równanie $x^2 - x + 1 = -1$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Równanie $x^2 - x + 1 = 4$ ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, które są równocześnie jedynymi rozwiązaniami rzeczywistymi równania $x^4 - 2x^3 + x = 6$.

Jednocześnie dostajemy rozkład $x^4 - 2x^3 + x - 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 - x - 3)$.